

DIPARTIMENTO DI DIRITTO ROMANO
STORIA E TEORIA DEL DIRITTO

S. M.

ARM. XII

PAL. V

12

UNIVERSITÀ DI BARI

DI
ISTRUZIONE PUBBLICA

VOL. 4

BIBLIOTECA

UNIVERSITÀ - BARI

II

Misc.

11

FACOLTÀ GIURISPRUDENZA

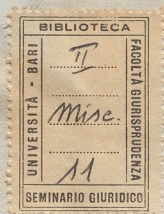
SEMINARIO GIURIDICO











Ueber den Isochronismus

des

Pendels und der Unruhe.

Von

F. Brönnimann.

Ueber den Isocronismus

Pendels und der Umrinde

F. Brünmann

Ueber den Isochronismus

des

Pendels und der Unruhe.

Das erste *Galilei'sche* Pendelgesetz, der Isochronismus der kleinen Schwingungen, erhielt durch *Huyghens* im Jahre 1657 eine mechanische Anwendung, die Regulirung der Gewichtuhren. Dem grossen Physiker verdanken wir auch den Regulator der Chronometer und der gewöhnlichen Taschenuhren, die Federspirale. Der Uhrmacher *Thuret* hat im Jahre 1674 — nach *Huyghens* Angaben — die erste Spirale verfertigt. Das Pendel und die Unruhe sind nur für kleine Amplituden isochron; die Oscillationsdauer wird kleiner, wenn die Schwingungsweite abnimmt, deshalb ist diese Regulirung nur eine angenäherte. *Huyghens* erkannte bekanntlich in dem cycloidalen Pendel den Isochronismus aller Schwingungen; wegen der praktischen Schwierigkeiten konnte diese Eigenschaft nicht verwerthet werden. Die Künstler fanden in der Federsuspension des Pendels eine passende Vorrichtung, um den Zeitunterschied grosser und kleiner Schwingungen auf ein Minimum zu bringen; bei der Federspirale übt die Endcurve gleichfalls einen Einfluss auf den Isochronismus aus. *Ferdinand Berthoud* hat in seinem Werke „*Histoire de la mesure du temps*“ zuerst über die Federsuspension geschrieben; doch scheint er deren Bedeutung nicht gewürdigt zu haben, denn in seinem zweiten Werke „*Essai sur l'horlogerie*“ verwirft er den Gebrauch derselben. *Wilhelm Clément*, Uhrmacher in London, hat die Federsuspension praktisch eingeführt, er hob besonders den Einfluss der Federlänge hervor. Im Jahre 1845 stellten die Herren *Laugier* und *Winnert* — einem Wunsche *Bessels* entsprechend — einige Versuche mit verschiedenen Federn und Pendeln an. Ihre Abhandlung findet man im 21. Bande der „*Comptes-Rendus de l'Académie des sciences*“. *Pierre Leroy* hat die Bedeutung der Länge und der Form der Spiralfeder zuerst angegeben. Der Verfasser der vorliegenden Abhandlung beschäftigte sich vor einigen Jahren mit diesen Fragen

Wird eine prismatische Feder durch eine normale Kraft P gebogen, so dehnen sich die obern Fasern aus, die untern ziehen sich zusammen und die mittlern werden weder verkürzt noch ausgedehnt. Die unveränderten Fasern bilden die neutrale Schicht; in einer prismatischen Feder mit rechteckigem Querschnitt ist die neutrale Fläche eine Symmetrieebene. Vermöge ihrer Elasticität reagirt jede Faser mit einer Kraft

$$F = \frac{Eqi}{l};$$

E ist der Elasticitätscoefficient = 20 bis 30000, q der Querschnitt, l die ursprüngliche Länge und i die Ausdehnung oder die Contraction einer Faser. Die sämtlichen Reactionen rufen ein Kräftepaar hervor mit dem Drehmomente

$$M = \frac{EJ}{r};$$

J ist das Trägheitsmoment des Querschnittes und hat den Werth $\frac{bd^3}{12}$ (b die Breite, d die Dicke des Querschnittes), r ist der Krümmungsradius der elastischen Linie in dem betrachteten Punkte.

Sind α und α' (Fig. 1) die Neigungswinkel zweier benachbarten Tangenten, so hat man $\alpha' - \alpha = d\alpha$; die Länge eines Curvelementes ds zwischen den Berührungspunkten ist $ds = r d\alpha$, somit:

$$r = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{dx}{dtg\alpha},$$

da man näherungsweise den Bogen durch die Tangente und das Curvenelement durch seine Projektion ersetzen kann.

Das Moment der elastischen Reactionen wird nun:

$$M = \frac{JE}{dx} d\text{tg. } \alpha \quad \text{und} \quad d\text{tg. } \alpha = \frac{M dx}{JE}.$$

Das statische Moment der äussern Kraft P ist $M = P(h-x)$, h bezeichnet die Endabszisse.

Die zwei Momente müssen den gleichen Werth haben, mithin wird:

$$d\text{tg. } \alpha = \frac{P(h-x) dx}{JE} = - \frac{P(h-x) d(h-x)}{JE}.$$

Nach der Integration ergibt sich, weil für $x=0$ auch $\text{tg. } \alpha=0$,

$$\text{tg. } \alpha = - \frac{P(h-x)^2}{2JE} + \frac{Ph^2}{2JE} \quad (1).$$

Die elastische Linie hat desshalb die Gleichung:

$$y = \int_0^x \text{tg. } \alpha dx = \frac{Phx^2}{2JE} - \frac{Px^3}{6JE} \quad (2).$$

Am beweglichen Ende der Feder ist $x=h$, die Endordinate p somit gleich

$$\frac{Ph^3}{3JE}.$$

Daraus berechnet man den Werth der äussern Kraft P , welche eine Ablenkung p hervorbringen soll, also

$$P = \frac{3JE p}{h^3} \quad (3).$$

Setzt man in (1) statt x und y die Werthe h und p ein, so ergibt sich für die Tangente am Endpunkte

$$\text{tang. } \phi = \frac{3p}{2h};$$

ihre Gleichung $y - p = \frac{3p}{2h}(x-h)$ liefert für $y=0$:

$$x = 0I = \frac{1}{3}h,$$

d. h.: Die Tangente am Endpunkte der elastischen Linie schneidet die Axe im Drittel der Endabszisse.

Ist nun O der feste Anfangspunkt der Suspensionsfeder, A der bewegliche Endpunkt, so können wir annehmen, das Pendel habe während einer kleinen Schwingung den Drehpunkt J .

Die äusseren Kräfte bestehen aus dem Gewichte $G = mg$ und aus der biegenden Kraft P , beziehungsweise ihrer Reaction.

Nach (3) ist

$$P = \frac{3 E J}{h^3} p, \quad p = I B \operatorname{tg} . \varphi = \frac{2}{3} h \operatorname{tg} . \varphi,$$

daher

$$P \times I B = \frac{4 E J}{3 h} \operatorname{tg} . \varphi \quad (4).$$

Man berechnet die Endabszisse h — als Funktion der Länge l und des Winkels φ — mittelst der Formel

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Aus (2) hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{J E} \left(h x - \frac{x^2}{2} \right) = K \left(h x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Entwickelt man nach den binomischen Lehrsatz, so findet sich:

$$ds = dx \left[1 + \frac{K^2}{2} \left(h x - \frac{x^2}{2} \right)^2 - \frac{K^4}{8} \left(h x - \frac{x^2}{2} \right)^4 + \dots \right].$$

Nach der Integration ist, wenn man die Länge der Feder mit l bezeichnet,

$$l = h + \frac{K^2 h^5}{15} - \frac{K^4 h^9}{360}.$$

Am freien Ende der Feder hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} . \varphi = K \frac{h^2}{2},$$

daher

$$K = \frac{2 \operatorname{tg} . \varphi}{h^2},$$

also

$$l = h + \frac{4 \operatorname{tg} .^2 \varphi h^5}{15} - \frac{16 \operatorname{tg} .^4 \varphi h^9}{360}$$

und

$$h = l - \frac{4 \operatorname{tg} .^2 \varphi}{15} h^5 + \frac{2 \operatorname{tg} .^4 \varphi}{45} h^9 \quad (5).$$

Setzen wir den Werth von h in (4) ein, so finden wir:

$$P \times I B = \frac{4 \operatorname{tg} . \varphi J E}{3 l} \left\{ 1 + \frac{4}{15} \operatorname{tg} .^2 \varphi - \frac{2}{45} \operatorname{tg} .^4 \varphi \right\}.$$

Die Differentialgleichung der Drehung eines Systemes materieller Punkte um eine Axe ist:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{\text{Drehmoment}}{\text{Trägheitsmoment}},$$

mithin:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = - \frac{m g e \sin. \phi + \frac{4 J E}{3 l} \operatorname{tg.} \phi \left\{ 1 + \frac{4}{15} \operatorname{tg.}^2 \phi - \frac{2}{45} \operatorname{tg.}^4 \phi \right\}}{m (e^2 + z^2)},$$

e ist der Hebelarm des Schwerpunktes und z der Trägheitshalbmesser des Pendels.

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = - \frac{g \sin. \phi + g R \operatorname{tg.} \phi \left\{ 1 + \frac{4}{15} \operatorname{tg.}^2 \phi - \frac{2}{45} \operatorname{tg.}^4 \phi \right\}}{L}, \quad (6)$$

$$R = \frac{4 J E}{3 l m e g}; \quad L = e + \frac{z^2}{e}$$

ist die Länge eines mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer.

Nach der Multiplikation mit $2 \frac{d\phi}{dt}$ und Integration findet man

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{L} \left\{ 2 \cos. \phi + 2 R \log. \cos. \phi \right\},$$

wenn wir die vierten Potenzen der Tangente nicht berücksichtigen.

Für $\phi = \beta$, d. h. für die halbe Amplitude, ist die Geschwindigkeit $\frac{d\phi}{dt} = 0$, somit:

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos. \phi - \cos. \beta) + 2 R \log. \frac{\cos. \phi}{\cos. \beta}}},$$

ferner

$$\cos. \phi - \cos. \beta = \frac{\beta^2 - \phi^2}{2} - \frac{\beta^4 - \phi^4}{24},$$

$$\cos. \phi + \cos. \beta = 2 - \frac{\beta^2 + \phi^2}{2} + \frac{\beta^4 + \phi^4}{24},$$

$$\log. \frac{\cos. \phi}{\cos. \beta} = \log. \frac{1 + \frac{\cos. \phi - \cos. \beta}{\cos. \phi + \cos. \beta}}{1 - \frac{\cos. \phi - \cos. \beta}{\cos. \phi + \cos. \beta}} = 2 \left(\frac{\cos. \phi - \cos. \beta}{\cos. \phi + \cos. \beta} \right).$$

Der Werth von dt ist genau genug, wenn man auch die dritten Potenzen der Cosinusse vernachlässigt.

Das Differential hat nun den Werth:

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\phi}{\sqrt{2(\cos. \phi - \cos. \beta) \left\{ 1 + \frac{2 R}{\cos. \phi + \cos. \beta} \right\}}},$$

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\phi}{\sqrt{(\beta^2 - \phi^2) \left(1 - \frac{\beta^2 + \phi^2}{12}\right) \left\{1 + R \left(1 + \frac{\phi^2 + \beta^2}{4}\right)\right\}}}$$

Man hat die vierten Potenzen in der Division von 2 durch $\cos. \phi + \cos. \beta$ vernachlässigt.

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\beta^2 - \phi^2} \sqrt{(1+R) - \frac{1-2R}{12} (\beta^2 + \phi^2)}}$$

oder

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g(1+R)}} \frac{d\phi}{\sqrt{\beta^2 - \phi^2} \sqrt{1 - \frac{1-2R}{12(1+R)} (\beta^2 + \phi^2)}}$$

Setzen wir

$$R' = \frac{1-2R}{12(1+R)},$$

entwickeln wir nach dem Binome, so wird

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g(1+R)}} \frac{\left[1 + \frac{R'}{2} (\beta^2 + \phi^2)\right] d\phi}{\sqrt{\beta^2 - \phi^2}}, \text{ oder}$$

$$dt = \sqrt{\frac{L}{g(1+R)}} \left\{ \frac{d\phi}{\sqrt{\beta^2 - \phi^2}} + \frac{R' \beta^2 d\phi}{2\sqrt{\beta^2 - \phi^2}} + \frac{R' \phi^2 d\phi}{2\sqrt{\beta^2 - \phi^2}} \right\} \text{ und}$$

$$t = \sqrt{\frac{L}{g(1+R)}} \left\{ \left(1 + \frac{3R'}{4} \beta^2\right) \text{Arc sin. } \frac{\phi}{\beta} - \frac{R'}{4} \phi \sqrt{\beta^2 - \phi^2} \right\}.$$

Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen 0 und β und multipliziert mit 2, so hat man für die Oscillationsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g(1+R)}} \left\{ 1 + \frac{3R'}{4} \beta^2 \right\} \quad (7).$$

Die Constanten haben dabei die Werthe

$$R = \frac{4JE}{3lme\bar{g}}, \quad R' = \frac{1-2R}{12(1+R)}.$$

Um die Richtigkeit der Formel zu erwahren, nehmen wir an, die Feder werde entfernt, dann ist:

$$R = \frac{4JE}{3lme\bar{g}} = 0, \quad \text{und} \quad R' = \frac{1}{12}.$$

Die Schwingungsdauer hat in diesem Falle den Werth

$$t = \pi \sqrt{\frac{L}{g} \left(1 + \frac{\beta^2}{16}\right)};$$

bekanntlich hat man für kleine Schwingungen

$$t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{16} \sin^2 \beta \right\}.$$

Die Formel (7) enthält die Auflösung des Problems; ist der Ausdruck

$$1 + \frac{3R'\beta_2}{4} = 1,$$

so hat die Schwingungsdauer eine von der Amplitude unabhängige Dauer; zu diesem Zwecke muss $R' = 0$ oder $1 - 2R = 0$, oder

$$R = \frac{1}{2} = \frac{4JE}{3lmg},$$

also

$$\frac{8JE}{3lmg} = 1 \quad (8)$$

sein.

Wäre R' negativ oder $2R > 1$, so hätte man mehr als den Isochronismus erreicht; die Oscillationsdauer grösserer Amplituden wäre kleiner als diejenige der kleinen Schwingungen. Die theoretischen Resultate stimmen vollkommen mit den Experimenten der Herren Langier und Winnerl überein. Sie beobachteten die Schwingungsdauer von 2000 Schwingungen mit zwei Federn A und B ; die erste A hatte eine Breite von 5^{mm} , eine Dicke von $\frac{3}{100}^{\text{mm}}$ und eine Länge von 1^{mm} ; die zweite B hatte gleiche Breite, gleiche Dicke, aber eine Länge von 3^{mm} .

Versuche der Herren Langier und Winnerl.

Mit der ersten Feder A .

Gewicht des Pendels.	Schwingungsdauer für 2000 Oscillationen.		
	Amplitude		
	1°	3°	5°
2 Kil.	1977",00	1975",85	1974",37
4 Kil.	2010",55	2009",84	2008",93
6 Kil.	2020",31	2019",80	2019",34
8 Kil.	2027",04	2026",68	2026",38

Mit der zweiten Feder B .

Gewicht des Pendels.	Schwingungsdauer für 2000 Oscillationen.		
	Amplitude		
	1°	3°	5°
4 Kil.	2024",96	2024",89	2024",99
6 Kil.	2030",28	2030",33	2030",37
8 Kil.	2034",81	2034",92	2034",98

Mit der Feder A wurde nach Formel (8)

$$\frac{8JE}{3l\pi mg} = 2R$$

zu gross, l ist ein Faktor des Nenners und vergrössert somit den Bruch.

Beim ersten Pendel z. B. ist die Oscillationsdauer für 5° kleiner als für 3° ; die Differenz nimmt ab, wenn das Gewicht des Pendels zunimmt; in der That ist mg ein Faktor des Nenners; beim vierten Pendel sind die Schwingungen fast isochron.

Mit der zweiten Feder B wurde

$$\frac{8JE}{3l\pi mg} = 2R$$

beinahe 1; man hat auch den Isochronismus für alle Schwingungen.

Die Formel (8) kann benutzt werden, um eine Dimension der Feder zu berechnen, wenn die übrigen Elemente bekannt sind.

Man kann den nützlichen Einfluss der Feder ohne Mühe in der Figur 1 nachweisen.

Zerlegt man die biegende Kraft P in zwei Seitenkräfte, von denen eine senkrecht auf AI steht, so hat diese Componente den Werth

$$P \cos. \varphi = \frac{2EJ \operatorname{tg.} \varphi}{h^2} \cos. \varphi \quad \text{oder} \quad \frac{2JE \sin. \varphi}{h^2}$$

Die normale Reaction der Feder nimmt zu proportional mit dem Sinus des Ablenkungswinkels.

Der Hebelarm AI dieser normalen Federkraft wächst zwischen $\frac{2}{3}h$ und $\frac{3}{4}h$; er wird somit mit der Amplitude grösser. Dieser Zuwachs des Hebelarmes der normalen Reaction bringt den Isochronismus hervor.

II. Isochronismus der Unruhe.

In den gewöhnlichen Taschenuhren hat die flache Feder die Gestalt einer Spirale, deren Gänge beinahe kreisrund sind. In den Chronometern bildet die Feder eine cylindrische Schraubenlinie, deren Enden zwei symmetrische Curven sind, die sich gegen den Mittelpunkt hin biegen. Herr Philipps hat in dem oben angezeigten Werke „Mémoire sur le spiral réglant“ die Endcurven der Schraubenlinie bestimmt; man

kann nun — mit einigen Aenderungen — das gleiche Verfahren anwenden, um die Endcurve einer flachen Spirale zu finden.

Die Ordinatenaxe Y gehe durch den Mittelpunkt der Unruhe und durch den festen Anfangspunkt A der Federspirale (Fig. 2); x und y seien die Coordinaten eines beliebigen Punktes B der Curve. Das Schwungrad und die Feder seien im Sinne des Uhrzeigers gedreht worden; K sei das Moment eines Kräftepaares, welches man anbringen müsste, um die Unruhe in der neuen Lage zu befestigen. Die Drehaxe des Schwungrades erleidet einen Druck, den wir zerlegen können, und die Zapfenlager reagieren in den Richtungen X und Y .

Das Moment der innern Spannungen einer gekrümmten Feder ist, wie früher angegeben wurde, $M = \frac{JE}{r}$. Bezeichnen nun r_0 und r die Krümmungsradien in B vor und nach der Drehung, so ist

$$JE \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right\}$$

die Zunahme des elastischen Momentes, zufolge der Drehung. (Der Krümmungsradius r in B ist kleiner als r_0 in B).

Der Theil der Spirale zwischen dem Punkte B und dem Schwungrade kann als eine starre Verbindung gedacht werden; es wirken dann in B die elastischen Spannungen des nicht fest gedachten Theiles.

Die äussern Kräfte bestehen aus dem Kräftepaare K , aus dem Drucke Y mit dem Hebelarm x und endlich aus dem Drucke X mit dem Hebelarm y . Für den Beharrungszustand hat man in B die Gleichung:

$$JE \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right\} = K + Yx - Xy \quad (1).$$

Diese Gleichung gilt für jeden Punkt der Curve; wir können daher mit dem Curvenelement ds multiplizieren und integrieren, somit:

$$JE \int \frac{ds}{r} - JE \int \frac{ds}{r_0} = \int K ds + \int Yx ds - \int Xy ds \quad (2).$$

$\frac{ds}{r}$ ist der Winkel zweier benachbarten Normalen vor, $\frac{ds}{r_0}$ derselbe Winkel nach der Drehung. Da die Normale im festen Endpunkte A unverändert bleibt, so hat

den Werth des Drehwinkels α .

Das Integral der Gleichung (1) ergibt:

$JE\alpha = KL + YLx - XLy$,
wenn L die Länge der Curve, x und y , die Coordinaten des Schwerpunktes bezeichnen.
Ist die Differenz $YLx - XLy$, null, so hat man

$$K = \frac{JE\alpha}{L},$$

d. h.: Das Kräftepaar der Federreaction wächst proportional mit dem Ablenkungswinkel.

Dieses Gesetz kann durch Versuche annähernd bewiesen werden; in der gewöhnlichen Ableitung der Schwingungsformel einer Spirale nimmt man dessen Gültigkeit ohne Weiteres an. Aus der jetzigen Betrachtung sehen wir, dass es nur dann richtig ist, wenn die Differenz $YLx - XLy$, verschwindet.

Bezeichnet man mit A das Trägheitsmoment des Schwungrades, so findet die Differentialgleichung statt:

$$A \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -K = -\frac{JE\alpha}{L} \quad (2).$$

Multipliziert man mit $2 \frac{d\alpha}{dt}$ und integrirt, so wird

$$A \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \frac{JE}{L} (\alpha_0^2 - \alpha^2),$$

α_0 ist die halbe Amplitude.

$$dt = \sqrt{\frac{AL}{JE}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

folglich

$$T = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \sqrt{\frac{AL}{JE}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}} = \pi \sqrt{\frac{AL}{JE}} \quad (3).$$

Die Oscillationen der Unruhe sind isochron, wie die Schwingungen des Pendels, und zwar unabhängig von der Grösse der Amplitude.

Aus der Formel (3) ersieht man, dass die Schwingungsdauer einer Spirale proportional mit der Quadratwurzel aus der Länge zunimmt. Diese Eigenschaft wird bei der Regulirung des Ganges einer Uhr benutzt; eine drehbare Zange hemmt mehr oder weniger die Schwingung des letzten Laufes, d. h. verlängert oder verkürzt die Spirale.

Die vernachlässigten Glieder $L(Yx - Xy)$ verschwinden, wenn die Coordinaten des Schwerpunktes der Feder in allen Lagen null sind, d. h. wenn der Schwerpunkt der Spirale immer in die Axe des Schwungrades fällt. Sie verschwinden aber auch, wenn die Werthe Y und X beide vernachlässigt werden können. In der Praxis sind

diese Kräfte immer sehr klein; man beobachtet an Taschenuhren — sogar nach langer Zeit — keine Aushöhlung der Zapfenlager; deshalb hat man in den gewöhnlichen Anker- oder Cylinderuhren einen angenäherten Isochronismus.

Die Zapfenpressungen können aber durch eine passende Wahl der Endcurven beseitigt werden.

Angenommen, die Axendrucke X und Y seien beide null, so folgt aus (1):

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{K}{JE} = \frac{\alpha}{L}; \quad (4)$$

die Aenderung der Krümmung ist dann überall eine gleichförmige. Sind umgekehrt (1) und (4) richtig, so fallen die Axenpressungen weg und man kann die Schwingungsdauer nach der Formel (3) berechnen.

Wir bestimmen nun eine Curve, welche der Gleichung

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L}$$

genügt; dabei müssen die Bedingungen an den Endpunkten der Curve auch erfüllt sein. Der äussere Anfangspunkt A ist fest, seine Tangente bleibt unverändert; der innere Endpunkt liegt in dem Mantel eines Ringes, der auf der Axe des Schwungrads befestigt ist. Seine Tangente ändert zwar ihre Lage, muss aber stets normal stehen auf der Verbindung des Mittelpunktes mit dem veränderten Endpunkte. Misst man auf der erwähnten Normale den constanten Halbmesser des Ringes ab, so muss man für alle Werthe des Drehwinkels α den unveränderten Mittelpunkt des Ringes erhalten.

Seien BS und CL (Fig. 2) zwei benachbarte Krümmungsradien und Θ der Winkel des ersten Krümmungshalbmessers mit der positiven Y -Axe — umgekehrt wie die Drehung des Uhrzeigers gemessen.

Die Seiten des rechtwinkligen Dreieckes LSN sind die Differentiale der Coordinaten, also

$$SN = -dy = -dr \cos. \Theta,$$

$$NL = -dx = -dr \sin. \Theta.$$

Nach der Multiplikation von (4) mit ds ist das Integral:

$$\int \frac{ds}{r} - \int \frac{ds}{r_0} = \int \frac{\alpha ds}{L},$$

oder

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{\alpha s}{L},$$

daraus

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{\alpha s}{L},$$

und aus (4) folgt:

$$r = \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}};$$

Θ_0 und r_0 bezeichnen die Werthe der Winkel und Radien vor der Drehung.

Die Differentiale der Coordinaten sind nun:

$$dy = -\cos\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}},$$

$$dx = -\sin\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}}.$$

Bezeichnen wir mit x' und y' die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes von A , mit r' den Krümmungsradius, so hat man nach der Drehung, weil die Tangente unverändert bleibt:

$$x' = 0, \quad y' = d - r' = d - \frac{r'_0}{1 + \frac{\alpha r'_0}{L}}, \quad d = OA.$$

Sind x'' und y'' die Coordinaten des letzten Krümmungsmittelpunktes — hier O_1 in dem Ringe — so ergibt sich:

$$x'' = \int_0^L -\sin\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}},$$

$$y'' = y' - \int_0^L \cos\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}}.$$

Durch partielle Integration findet sich:

$$\int \sin\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) d \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}} = \left[\sin\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}} \right]' - \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}} d \sin\left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right).$$

Die mit $'$ bezeichnete Klammer bedeutet, dass man ihren Werth in O_1 nehmen muss und dass man von demselben den Werth in A abziehen soll. Die Klammer ist demnach gleich

$$\frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \sin. (\Theta''_0 + \alpha).$$

Man hat aber auch, weil $\frac{ds}{d\Theta_0} = r_0$,

$$\begin{aligned} d \sin. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) &= \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) \times \left(1 + \frac{\alpha}{L} \frac{ds}{d\Theta_0} \right) d\Theta_0, \\ &= \left(1 + \frac{\alpha r_0}{L} \right) \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d\Theta_0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int \frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}} d \sin. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) &= \int_0^L r_0 \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d\Theta_0 = \\ &= \int_0^L \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds; \end{aligned}$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \int \sin. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left(\frac{r_0}{1 + \frac{\alpha r_0}{L}} \right) &= \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \sin. (\Theta''_0 + \alpha) - \\ &- \int_0^L \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds. \end{aligned}$$

Setzt man den gefundenen Werth in x'' ein und behandelt man den Werth y'' ganz ebenso, so kommt:

$$\begin{aligned} x'' &= d \sin. (\Theta''_0 + \alpha) - \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \int_0^L \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds, \\ y'' &= d - \frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} \cos. (\Theta''_0 + \alpha) - \int_0^L \sin. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds. \end{aligned}$$

Der letzte Krümmungsradius

$$\frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0}$$

muss gleich sein dem Halbmesser R des Ringes vermehrt um den Abstand ϑ der Punkte 0 und $0'$, also

$$\frac{r''_0}{1 + \frac{\alpha}{L} r''_0} = R, = R + \vartheta.$$

Die Coordinaten des Punktes $0'$ sind daher:

$$x'' = -\sin.(\Theta''_0 + \alpha) R, + \int_0^L \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds,$$

$$y'' = d - \cos.(\Theta''_0 + \alpha) R, - \int_0^L \sin. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds.$$

Die Coordinaten x''' und y''' des Mittelpunktes berechnet man aus denjenigen von $0'$, wenn man O, P , beziehungsweise OP subtrahirt. Da der Winkel Θ'' des letzten Halbmessers überstumpft ist, so nehmen wir die positiven Vorzeichen, desshalb

$$\begin{aligned} x''' &= x'' + \vartheta \sin. \Theta'', \\ y''' &= y'' + \vartheta \cos. \Theta'', \end{aligned}$$

wobei $\vartheta = R, - R.$

Das Centrum des Ringes und des Schwungrades ist bestimmt durch

$$x'' = -R \sin.(\Theta''_0 + \alpha) + \int_0^L \cos. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds,$$

$$y'' = d - R \cos.(\Theta''_0 + \alpha) - \int_0^L \sin. \left(\Theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds;$$

es müssen zufolge der gestellten Bedingungen $x''' = 0$ und $y''' = 0$ sein.

Nimmt man den Winkel α so klein an, dass man seinen Sinus gleich dem Bogen und seinen Cosinus gleich 1 setzen darf, so ist es möglich, die Integrale auszurechnen; die Bedingungen $x''' = 0$ und $y''' = 0$ werden dann:

$$(1) \quad \int_0^L \cos. \Theta_0 ds = R \sin. \Theta''_0,$$

$$(2) \quad \int_0^L \sin. \Theta_0 ds = d - R \cos. \Theta''_0,$$

$$(3) \quad - \int_0^L s \sin. \Theta_0 ds = RL \cos. \Theta'_0,$$

$$(4) \quad \int_0^L s \cos. \Theta_0 ds = RL \sin. \Theta'_0.$$

Die zwei ersten Bedingungen sind durch die Form der Spirale erfüllt; in der That ist

$$\int_0^L \cos. \Theta_0 ds$$

die algebraische Summe der Projektionen der Curvenstücke auf der X-Axe.

Es ist:

$$OT - TQ + QM - MV = OT - TO - OQ + QO + OM - MO - OV = -OV \\ -OV = R \sin. \Theta'_0.$$

Die Bedingung (2) wird ebenso durch die Form der Spirale erfüllt. Die Gleichungen (3) und (4) geben mittelst partieller Integration:

$$- \int_0^L s \sin. \Theta_0 ds = RL \cos. \Theta'_0 + Ly, = RL \cos. \Theta'_0, \\ \int_0^L s \cos. \Theta_0 ds = RL \sin. \Theta'_0 - Lx, = RL \sin. \Theta'_0.$$

Die Glieder Ly und Lx verschwinden, wenn $x=0$ und $y=0$, d. h.:

Der Schwerpunkt der Spirale muss in die Axe des Schwungrads fallen.

In der Praxis wird diese Bedingung von einer gewöhnlichen Spirale ohne End-curve fast erfüllt, wie aus dem folgenden Beispiele hervorgeht.

Die Radien der Halbkreise seien $r_1, r_2, \dots, r_{20}$; die Spirale habe somit zehn Gänge, der Verjüngungsmassstab sei $\frac{1}{36}$. Die Halbkreise $r_1, r_3, \dots, r_{19}$, welche über der Axe liegen (Fig. 3), haben den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O_1 ; die Halbkreise $r_2, r_4, \dots, r_{20}$, unter der Axe liegend, sind von O_2 aus beschrieben. Der erste Halbmesser misst $r_1 = 37^{\text{mm}},25$; der zweite $r_2 = 42^{\text{mm}},75$ und so fort; der Abstand $O_1 O_2$ beider Mittelpunkte beträgt demnach $5^{\text{mm}},50$.

Ich habe die Ordinate des Schwerpunktes S der Kreise mit ungeraden Zeichen nach der Formel berechnet:

$$y_1 = \frac{2(r_1^2 + r_3^2 + \dots + r_{19}^2)}{\pi(r_1 + r_3 + \dots + r_{19})} = 62^{\text{mm}}, 33143,$$

ebenso findet man

$$y_2 = 65^{\text{mm}}, 61712 \quad (\text{Fig. 3}).$$

Die Gewichte sind:

$$G_1 = 2719,048, \quad G_2 = 2898,12, \quad G = 5617,168.$$

Die ähnlichen Dreiecke $O_1 A S_1$ und $O_2 A S_2$ geben:

$$\frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1} = \frac{5,50}{2 O A}, \quad O A = 0,0706194,$$

$$O_1 A = 2,6793806 \quad \text{und} \quad \alpha = 87^\circ 32' 18'' \frac{8}{10},$$

$$S_1 S_2 = \frac{y_1 + y_2}{\sin. \alpha} = 128,067,$$

$$S_1 S : G_2 :: S_1 S_2 : G, \quad S_1 S = 66,0747,$$

$$S_1 A = \frac{y_1}{\sin. \alpha}, \quad A S = S_1 S - S_1 A = 3,6857.$$

Nun findet man, da AO und AS bekannt sind:

$$OS = 3^{\text{mm}}, 68334 \quad \text{und} \quad AOS = 91^\circ 21' 49'' \frac{8}{10}.$$

Der Schwerpunkt der Spirale ohne Endcurve fällt also beinahe in die Axe des Schwungrades.

Die gesuchte Endcurve muss ihren Schwerpunkt in der Verlängerung von SO haben; das Moment derselben ist durch das Produkt $G \times OS$ bestimmt. Man zieht nach dem Gefühle eine erste Curve, theilt dieselbe in kleine Theile ein, bestimmt von jedem Theilchen den Schwerpunkt. Jedes Theilchen kann dabei entweder als Kreisbogen oder als gerade Linie behandelt werden. Durch O legt man eine Axe normal auf OS , misst für jeden Schwerpunkt die Hebelarme und berechnet die Momente. Die algebraische Summe der Momente in Bezug auf OS muss null sein, dann liegt der Schwerpunkt in der Axe OS . Ist nun auch das zweite Moment der Endcurve dem Produkte $G \times OS$ gleich, so genügt dieselbe den gestellten Bedingungen.

Nach diesem Verfahren ist die Endcurve bestimmt worden; als Probe sind die Momente in Bezug auf die Axen X und Y berechnet worden; der Schwerpunkt hat nun seine richtige Lage, wenn das Moment der Spirale und der Endcurve null oder beinahe null ist.

Die Endcurve besteht:

- 1) Aus einem Kreisbogen von 57° , der Radius beträgt $147^{\text{mm}}, 25$, er berührt den Halbkreis r_{20} in der X -Axe und hat O_1 als Mittelpunkt;
- 2) aus einem Kreisbogen von 92° , dessen Radius ist 71^{mm} , er berührt den ersten Bogen;

- 3) aus einer Tangente von 160^{mm} Länge;
 4) aus einem Kreisbogen von 90° mit einem Halbmesser gleich 65^{mm}, er berührt die erwähnte Tangente.

Folgende Tabelle enthält die Momente:

X-Axe.	
Untere Seite.	Obere Seite.
Moment der Spirale . . . 20684	Moment des Bogens 57° . . 9874
„ des Bogens 90° . . 8678	„ „ „ 92° . . 14364
29362	„ der Tangente . . . 5040
	29278

Die Differenz 29362—29278=84 verschwindet gegen den Werth der Momente auf beiden Seiten der Axe.

Y-Axe.	
Linke Seite.	Rechte Seite.
Moment der Tangente . . . 10320	Moment der Spirale . . . 492
„ des Bogens 90° . . 10823	„ des Bogens 57° . . 17782
21143	„ „ „ 92° . . 2736
	21010

Die Differenz 21143—21010=133 ist auch gegen 21143 unbedeutend.

Schliesslich folgen noch einige Versuche, die von Herrn Philipps gemacht worden sind, um die Richtigkeit der gefundenen Formeln zu erproben. Nach der Formel (3) ist die Schwingungsdauer der Unruhe, wenn die Glieder $Yx_1 - Xy_1$ vernachlässigt werden können:

$$T = \pi \sqrt{\frac{AL}{JE}}$$

Theoretisch fand er für die Schwingungsdauer einer Lepine-Uhr mit flacher Feder 0'',2015, für die Schwingungszahl während einer Stunde 17865; die entsprechenden praktischen Werthe sind 0'',200 und 18000. Ein Chronometer des Herrn Garnier mit schraubenförmiger Spirale ergab theoretisch 1'',244, beziehungsweise 2895 und praktisch 1'',247, beziehungsweise 2887.

Das Gesetz der proportionalen Zunahme der Reaction der Spirale mit dem Ablenkungswinkel ist auch bestätigt worden; die Spiralfedern mit theoretischer Endcurve ergeben sehr gute Resultate, wie aus folgenden Tabellen hervorgeht.

Spiralfeder mit theoretischer Endcurve.

Winkel.	Kraft in Grammes.	Reduzirte Kraft vermittelst des Winkel- verhältnisses.
22 $\frac{1}{2}$	1,538	1,5380
45	3,076	1,5380
67 $\frac{1}{2}$	4,611	1,5381
90	6,132	1,5375
135	9,219	1,5384
180	12,286	1,5390
225	15,368	1,5390
270	18,470	1,5417

Spiralfeder mit beliebiger Endcurve.

22 $\frac{1}{2}$	1,500	1,5000
45	3,002	1,5027
67 $\frac{1}{2}$	4,489	1,4963
90	5,967	1,4926
135	8,938	1,4902
180	11,906	1,4893
225	14,866	1,4881
270	17,872	1,4907

Endlich kann die Unveränderlichkeit des Mittelpunktes der Spirale gezeigt werden, wenn man nach (4) die neuen Krümmungsradien berechnet und die Curve zeichnet. Es zeigt sich dabei, dass selbst für grosse Ablenkungswinkel der Mittelpunkt fast gar nicht verschoben wird.

